Chapitre 6

Matrices et suites

I. Puissances d'une matrice

1) Puissances d'une matrice carrée

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

La puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice A est la matrice carrée d'ordre p obtenue en multipliant n fois la matrice A par elle-même :

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

Par convention, on pose $A^0 = I_p$.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

Soit A une matrice carrée d'ordre p. Soit m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

$$A^m \times A^n = A^{m+n} \text{ et } (A^m)^n = A^{m \times n}$$

Remarque :

Attention, à cause de la non-commutativité du produit des matrices carrées, en général :

$$(A \times B)^n \neq A^n \times B^n \text{ et } (A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Propriété (formule du binôme) :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p qui commutent (c'est-à-dire $A \times B = B \times A$).

On a alors, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i \times B^{n-i}$$

2) Matrices triangulaires

Définitions :

Une matrice carrée est dite :

- **triangulaire supérieure** (ou **inférieure**) si tous les éléments situés en dessous (au-dessus) de sa diagonale sont nuls.
- strictement triangulaire si elle est triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.

Exemples :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

A et C sont des matrices triangulaires, B et D sont des matrices strictement triangulaires.

Propriétés :

Les puissances d'une matrice triangulaire sont triangulaires de même forme.

Les puissances d'une matrice strictement triangulaire d'ordre n sont nulles à partir de l'exposant n.

Exemple :

Pour $n = 3$, si $M=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ (a, b et c réels), $M^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ d'où $M^3 = O_3$.

On en déduit que pour tout $n \geqslant 3$, $M^n = O_3$.

Remarques :

- Une matrice dont une puissance est nulle est appelée **nilpotente**.
- Ces propriétés permettent de calculer des puissances d'une matrice en la décomposant en somme de matrices particulières ou en effectuant des calculs par blocs.

3) Matrices diagonales

Définition :

Une **matrice diagonale** est une **matrice carrée** dont tous les coefficients qui ne sont pas situés sur sa diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Propriété :

Soit D une matrice diagonale. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D^n est la matrice diagonale obtenue en élevant à la puissance n les coefficients de D.

Démonstration :

Cette propriété se démontre par une récurrence immédiate.

Exemple :

Si $D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, alors pour tous n de $\mathbb{N}^*$, $D^n=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$.

4) Diagonalisation d'une matrice

Définition :

Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice carrée P inversible et une matrice carrée D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque :

Si $A = PDP^{-1}$, on obtient A^n de façon simple.

En effet, $A^2 = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Propriété :

Cas des matrices carrées d'ordre 2.

- Une matrice carrée A d'ordre 2 est diagonalisable si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ (non nécessairement distincts) et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$.
- Si A est diagonalisable :
  - Les réels λ et μ sont appelés les **valeurs propres** de la matrice A.
  - La matrice carré $P = VW$ est inversible et telle que $A=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$.

Démonstration :

- Si A est diagonalisable, il existe λ et μ réels et $P=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ inversible tels que :

  $A=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$.

Soit $\text{V}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\text{W}=\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$.

Comme *P* est inversible, son déterminant est non nul donc $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

On en déduit que *V* et *W* ne sont pas proportionnelles.

On montre alors, en effectuant les calculs, que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe des réels λ et μ des matrices non proportionnelles $\text{V}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\text{W}=\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$, telles que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$.

  On pose $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$.

  Le déterminant $\alpha\delta - \gamma\beta$ de *P* est non nul car *V* et *W* ne sont pas proportionnelles, donc *P* est inversible.

  Sachant que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$, on montre que $PDP^{-1} = A$. Donc *A* est diagonalisable.

Exemple :

Soit $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ alors $\text{V}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ et $\text{W}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ sont tels que $AV = -2V$, $AW = -W$.

A a pour valeurs propres -2 et -1 et $A=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque :

Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

Prenons $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, et posons $\text{V}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Alors $AV = \lambda V$ s'écrit

$$\begin{cases}ax+by=\lambda x\\ cx+dy=\lambda y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-\lambda)x+by=0\\ cx+(d-\lambda)y=0\end{cases} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \text{ avec } B=\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}=A-\lambda I_2 .$$

Si $A - \lambda I_2$ est inversible, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, et donc *V*, qui est nulle est proportionnelle à toute matrice *W* de format 2×1.

Pour que *A* soit diagonalisable, il faut donc que *B* ne soit pas inversible, donc que son déterminant soit nul, d'où $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$.

Exemples :

- Pour $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, l'équation $\lambda^2 - 4\lambda + 10 = 0$ n'a pas de solution réel.

  Donc *A* n'est pas diagonalisable.

- Pour $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, l'équation $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ a deux solutions réelles : -2 et -1.

Donc *A* est diagonalisable et les valeurs propres sont -2 et -1.

On détermine ensuite *V* et *W* :

- Pour la valeur propre -2, on pose $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et V doit vérifier *AV* = -2*V* soit :

  $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=-2x \\ -x+y=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y=0 \\ -x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y$

  Donc $V=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

- Pour la valeur propre -1, on pose $W=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et *W* doit vérifier *AW* = -1*W* soit :

  $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=-x \\ -x+y=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$

  Donc $W=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

II. Suites récurrentes et matrices

1) Suite numérique (u_n) vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$

Une telle suite est dite arithmético-géométrique (ou à récurrence affine).

Étudions un exemple.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}2\, u_n + 4$.

De la formule de récurrence à la formule explicite

Observons que **si** la suite (u_n) converge, alors sa limite l est solution de l'équation $\ell = 0{,}2\, \ell + 4$.

Cette équation a pour solution $\ell = 5$.

Cela suggère de poser : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5$.

De $u_{n+1} = 0{,}2\, u_n + 4$, on déduit : $u_{n+1} - 5 = 0{,}2(u_n - 5)$ soit $v_{n+1} = 0{,}2\, v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $a = 0{,}2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 7$.

D'où, pour tout n, $v_n = v_0 \times a^n$ soit $v_n = 7 \times 0{,}2^n$. Ainsi $u_n - 5 = 7 \times 0{,}2^n$ donc $u_n = 7 \times 0{,}2^n + 5$.

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite numérique (u_n) vérifie $u_{n+1} = a\, u_n + b$, avec $a \neq 1$.

- On résout l'équation $\ell = a\, \ell + b$: elle a une solution unique c.
- On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - c$.

  On prouve qu'elle est géométrique (de raison a). Il en résulte que, pour tout entier naturel n, $v_n = a^n \times v_0$.
- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + c$.

  D'où l'expression : $u_n = a^n(u_0 - c) + c$.

Étude de la convergence

Sur notre exemple, la raison $a = 0{,}2$ est telle que $-1 < a < 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Si on applique cette méthode dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

<u>Propriété :</u>

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_{n+1} = a\, u_n + b$, avec $-1 < a < 1$.

La suite (u_n) **converge** vers le nombre l vérifiant $\ell = a\, \ell + b$.

<u>Remarque :</u>

On démontre que si $a \leqslant -1$ ou $a > 1$, la suite est divergente (hormis le cas particulier ou $u_0 = c$, auquel cas elle est constante).

2) *Écriture matricielle de relations de définition de suites récurrentes*

Différents types de suites définies par des relations de récurrence se ramènent à l'étude d'une suite de matrice colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A\,X_n + B$ où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

Suite couplées

Soit deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 5$ et $u_0 = -2$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = 1{,}7\,u_n + 0{,}6\,v_n + 3$ et $v_{n+1} = -5\,u_n + 0{,}1\,v_n - 1$.

Si on définit, pour tout $n \geqslant 0$, la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$, alors les relations de récurrence ci-dessus s'écrivent aussi pour tout $n \geqslant 0$:

$X_{n+1} = A\,X_n + B$, où A est la matrice carrée $A=\begin{pmatrix}1{,}7 & 0{,}6\\-5 & 0{,}1\end{pmatrix}$ et B la matrice colonne $B=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Justification de la relation :

Le produit matriciel $A\,X_n$ est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix}1{,}7\,u_n+0{,}6\,v_n\\-5\,u_n+0{,}1\,v_n\end{pmatrix}$ on a donc bien l'équivalence de cette relation avec les relations de définition des deux suites.

Suite définie par une relation de récurrence d'ordre 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 11$ et $u_1 = -2$ et $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 0{,}5\,u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Si on définit, pour tout $n \geqslant 0$; la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}$ alors la relation de récurrence ci-dessus s'écrit aussi, pour tout $n \geqslant 0$:

$X_{n+1} = A\,X_n$ où A est la matrice carrée $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-0{,}5 & 3\end{pmatrix}$.

Justification de la relation :

Pour tout $n \geqslant 0$, la matrice colonne X_{n+1} est égale à $X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$ et le produit matriciel $A\,X_n$ est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\-0{,}5\,u_n+3\,u_{n+1}\end{pmatrix}$.

L'égalité matricielle $X_{n+1} = A\,X_n$ est donc équivalente au système d'égalités, formé d'une égalité triviale et de la relation de récurrence définissant la suite $\begin{cases}u_{n+1}=u_{n+1}\\u_{n+2}=3\,u_{n+1}-0{,}5\,u_n\end{cases}$.

Remarque :

La matrice colonne X_0 est la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ dans le premier exemple et la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ dans le second exemple.

3) Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant $U_{n+1} = A\, U_n + B$

Étudions un exemple.

La suite (U_n) de matrices colonnes de dimension 2 × 1 est définie par :

$U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\, U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De la formule de récurrence à la formule explicite

En s'inspirant de la méthode précédente, on cherche une matrice colonne C de dimension 2 × 1, telle que $C = AC + B$.

Cette équation d'inconnue C s'écrit $C - AC = B$, c'est-à-dire $(I - A)C = B$.

Si $I - A$ est inversible, multiplions à gauche les deux membres par $(I - A)^{-1}$: $C = (I - A)^{-1}B$.

Or $I - A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est inversible (car det($I - A$) = 6), et $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

donc $C = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

De $U_{n+1} = A\, U_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.

Posons alors, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - C$. On obtient $V_{n+1} = AV_n$.

Démontrons, par récurrence, que $V_n = A^n V_0$ est vraie pour tout entier naturel n.

- *Initialisation* : Pour $n = 0$, l'égalité est vraie car $A^0 = I$.
- *Hérédité* : Si $V_n = A^n V_0$, alors en multipliant à gauche les deux membres par A, on obtient $AV_n = A^{n+1}V_0$, c'est-à-dire $V_{n+1} = A^{n+1}V_0$.
- *Conclusion* : Pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

En revenant à la suite (U_n) :

pour tout entier naturel n, $U_n - C = A^n(U_0 - C)$ d'où $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Ainsi pour l'exemple, $U_n = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

Remarque :

En utilisant la méthode de diagonalisation.

A est diagonalisable. On a vu que $D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

et donc $\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^n\times\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

et donc $\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3\times(-2)^n-2\times(-1)^n & -6\times(-2)^n+6\times(-1)^n\\ (-2)^n-(-1)^n & -2\times(-2)^n+3\times(-1)^n\end{pmatrix}$

Par conséquent : $U_n=\begin{pmatrix}3\times(-2)^n-2\times(-1)^n & -6\times(-2)^n+6\times(-1)^n\\ (-2)^n-(-1)^n & -2\times(-2)^n+3\times(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ -\frac{11}{3}\end{pmatrix}$

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite de matrices colonnes (U_n) vérifie $U_{n+1} = A\,U_n + B$, où la matrice $I - A$ est **inversible**.

- On résout l'équation $C = AC + B$: elle admet une unique solution $C = (I - A)^{-1}B$.
- On introduit la suite auxiliaire (V_n) définit par $V_n = U_n - C$.

  On prouve qu'elle vérifie, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$, puis, par récurrence, que $V_n = A^nV_0$.
- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n, $U_n = V_n + C$.

D'où l'expression : $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Exemple

Appliquons la méthode à la suite (U_n) de matrices colonnes de dimension 3 × 1 définie par :

$U_0=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 6\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\,U_n + B$ où $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

Cherchons une matrice colonne C de dimension 3 × 1 telle que $C = AC + B$,

c'est-à-dire $(I - A) \times C = B$.

Nous obtenons donc, pour tout entier naturel n, $U_n=A^n(U_0-C)+C=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}7\\ 3\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$.

Autre méthode : par sommation

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = A\,U_{n-1} + B$ donc $U_n = A(A\,U_{n-2} + B) + B$ que l'on peut écrire sous la forme $U_n = A^2\,U_{n-2} + (AB + B)$, ou encore $U_n = A^2\,U_{n-2} + (A + I)B$, où I est la matrice unité de même dimension que A. On montre par récurrence, que :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = A^n U_0 + (A^{n-1} + \ldots + A + I)B = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B$.

Suite de matrices lignes

Si (V_n) est une suite de matrices lignes de même format telles que $V_{n+1} = V_n\,A + B$, où A est une matrice carrée et B une matrice ligne, on obtient des résultats analogues : si $I - A$ est inversible, l'équation $C = CA + B$ a une solution unique : $C = B(I - A)^{-1}$.

Alors, pour tout entier naturel n, $V_n = (V_0 - C)A^n + C$.

III. Convergence

1) Limite d'une suite de matrice

Définition :

(U_n) est une suite de matrices de format donné, L une matrice de même format.

Dire que la suite (U_n) a pour **limite *L*** signifie que, pour chaque emplacement, la suite des coefficients de U_n a pour limite le coefficient de L.

On dit aussi que (U_n) **converge vers *L***.

Remarque :

Si (U_n) ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple :

$U_n = \begin{pmatrix} 3+0{,}2^n \\ 2-0{,}5^n \\ 7+0{,}3^n \end{pmatrix}$, $n\mathbb{N}$. La suite (U_n) a pour limite la matrice $L = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Convergence

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type :

$$X_{n+1} = A\,X_n + B$$

(On adaptera les définitions aux suites de matrices lignes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A\,X_n + B$).

Propriété de la limite en cas de convergence

Propriété :

Si une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1} = A X_n + B$ est convergente, alors sa limite X est une matrice colonne vérifiant l'égalité :

$$X = AX + B$$

Démonstration :

Dans l'égalité $X_{n+1} = A X_n + B$, le membre de droite converge vers X. De plus, comme conséquence des théorèmes concernant les limites de sommes et de produit par un nombre réel des suites convergentes, le membre de gauche converge vers $AX + B$.

D'où, par unicité de la limite : $X = AX + B$.

Remarque :

La propriété précédente permet donc de dire que dans le cas de la convergence, la limite de la suite de matrices colonnes est à rechercher parmi les suites constantes vérifiant la relation de récurrence.

Recherche d'une suite constante

Propriété :

Soit I la matrice identité de même taille qu'une matrice A.

Si la matrice $I - A$ est inversible, pour toute matrice colonne B de même taille que A, il existe une, et une seule, matrice colonne X vérifiant $X = AX + B$.

Démonstration :

Par les propriétés du calcul matriciel, $X = AX + B \Leftrightarrow (I - A)X = B \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1} \times B$.

Il y a donc une, et une seule, matrice colonne X solution de $X = AX + B$.

Remarque :

Puisqu'il n'y a qu'une seule matrice colonne limite solution, pour toute matrice colonne X_0 pour laquelle la suite (X_n) est convergente, la limite X est indépendante des valeurs de X_0.

Propriété :

Dans le cas où la matrice $I - A$ n'est pas inversible :

- Soit il n'existe **aucune** matrice colonne vérifiant $X = AX + B$ (dans le cadre de la recherche d'une limite, cela signifie qu'il ne peut y avoir convergence).
- Soit il existe **une infinité** de matrices colonnes X solution $X = AX + B$ dont l'une est éventuellement la limite recherchée dans le cas de la convergence.

Remarques :

- Dans ce cas, on recherche donc les éventuelles solutions en résolvant le système dont l'écriture matricielle est $X = AX + B$ ou $(I - A)X = B$.
- D'autres conditions liées à la limite peuvent se rajouter à celles données par le système et permettre de déterminer parmi les solutions celle correspondant à la limite dans le cas de la convergence.

IV. Chaines de Markov

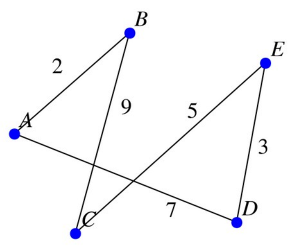
1) Graphe pondéré

Définitions :

- Un graphe **étiqueté** est un graphe (orienté ou non) dont les liaisons entre les sommets (arêtes ou arcs) sont affectés d'étiquettes (mot, lettre, symbole, ...).
- Un graphe **pondéré** est un graphe étiqueté dont toutes les étiquettes sont des nombres réels positifs ou nuls. Ces nombres sont les **poids** des liaisons (arêtes ou arcs) entre les sommets.
- Le **poids d'une chaîne** (respectivement **d'un chemin**) est la somme des poids des arêtes (resp. des arcs) qui constituent la chaîne (resp. le chemin).
- Une **plus courte chaîne** (resp. un **plus court chemin**) entre 2 sommets est, parmi les chaînes qui les relient (resp. les chemins qui les relient) celle (celui) qui a le poids minimum.

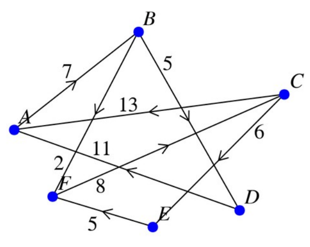
Exemples :

Graphe G_1



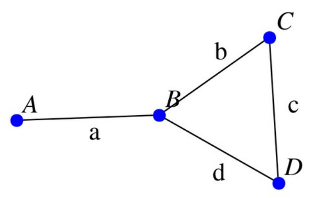
Le graphe G_1 est un graphe pondéré, non orienté.

Graphe G_2



Le graphe G_2 est pondéré et orienté.

Graphe G_3



Le graphe G_3 est étiqueté, non orienté.

2) ***Graphes probabilistes***

Présentation

Définition :

Un graphe **probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** dans lequel :

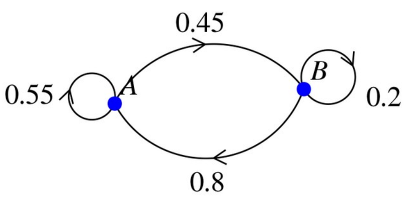
- il y a au plus un arc d'un sommet à l'autre
- la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Remarques :

- Les poids des arcs sont alors des probabilités (nombres réels compris entre 0 et 1).
- Un graphe probabiliste indique les différents états possibles d'un système (sommets du graphe) et les probabilités de passage d'un état à l'autre (poids des arcs).

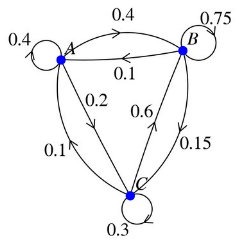
Exemples :

Graphe n°1



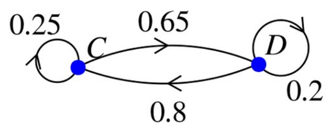
Le graphe n°1 est un graphe probabiliste d'ordre 2.

Graphe n°2



Le graphe n°2 est un graphe probabiliste d'ordre 3.

Graphe n°3



Le graphe n°3 n'est pas un graphe probabiliste car la somme des poids des arcs issus du sommet *C* est égal à 0,9.

3) ***Chaîne de Markov***

Définitions :

Une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires est une **chaîne de Markov** à deux états *a* et *b* (respectivement trois états *a*, *b* et *c*) lorsque, pour tous x_0, x_1, … , x_k, x_{k+1} dans $\{a\ ;\ b\}$ (respectivement dans $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$), on a :

$$P_{X_0=x_0,\, X_1=x_1,\, \dots,\, X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1})=P_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1})$$

La probabilité $P_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1})$ s'appelle la **probabilité de transition** de l'état x_k à l'état x_{k+1}.

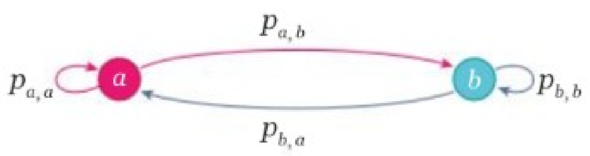
L'ensemble $\{a\ ;\ b\}$ (respectivement dans $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$) est appelé **espace des états**.

Remarques :

- La définition d'une chaîne de Markov signifie que les états passés n'ont aucune influence sur les états futurs : seul l'état présent à son importance.
- On peut représenter une chaîne de Markov à l'aide d'un graphe probabiliste. Chaque sommet représente un état de la chaîne de Markov et les poids portés par les arêtes orientées représentent les probabilités de transitions.

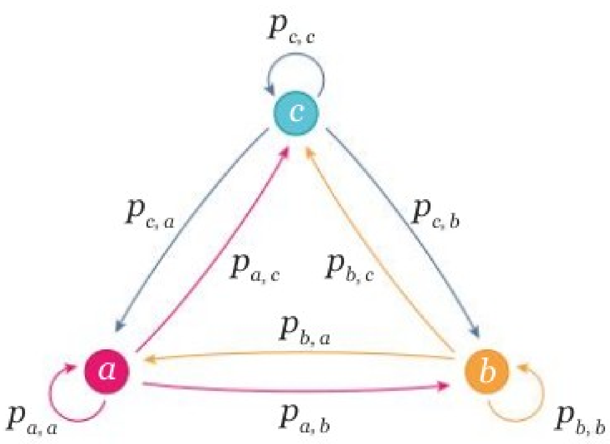
Graphe d'une chaîne de Markov à deux états

$P_{X_k=a}(X_{k+1}=b)=p_{a,b}$



Graphe d'une chaîne de Markov à trois états

$P_{X_k=c}(X_{k+1}=b)=p_{c,b}$



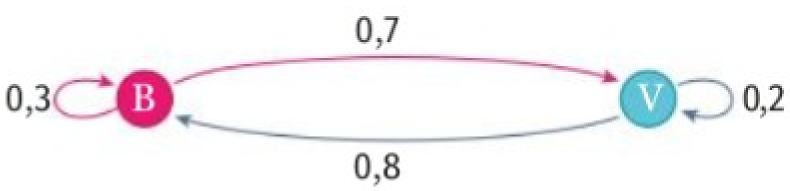
Définition :

La **distribution initiale** d'une chaîne de Markov (X_n) est la loi de probabilité de X_n.

Exemple :

Ike n'aime pas prendre le bus pour aller à l'école et préfère prendre son vélo. Il n'utilise pas d'autres moyen de locomotion.

Chaque jour de la semaine, il va à l'école en bus avec une probabilité de 0,8 s'il ne l'a pas emprunté la fois précédente et avec une probabilité de 0,3 sinon.



4) État probabiliste et matrice de transition

Définition :

Soit une expérience aléatoire à deux issues possibles *A* et *B*.

À chacune de ces issues est affectée une probabilité p_A et p_B.

Lorsque l'on répète cette expérience, dans les mêmes conditions, on se retrouve après chaque réalisation dans un état donné. Cet état à l'issue de chacune des réalisations est appelé **état probabiliste**.

Il peut être représenté par une matrice ligne $P_n = (a_n \ \ b_n)$ qui traduit la probabilité d'obtenir l'issue *A* ou l'issue *B* après *n* réalisations de l'expérience aléatoire.

On a : $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel *n*.

Remarque :

On généralise sans difficulté cette définition à une expérience aléatoire ayant un nombre *k* fini d'issues possibles ($k \geqslant 2$).

Définition :

Soit *G* un graphe probabiliste d'ordre *n* dont les sommets sont numérotés de 1 à *n*.

La **matrice de transition** *M* de *G* est la matrice carrées d'ordre *n* telle que m_{ij} est égal à la probabilité portée par l'arc reliant le sommet *i* au sommet *j* s'il existe et 0 sinon.

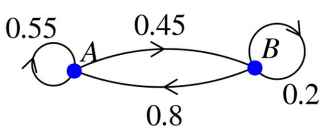
Remarque :

La matrice de transition *M* permet d'étudier l'évolution du système que schématise le graphe probabiliste.

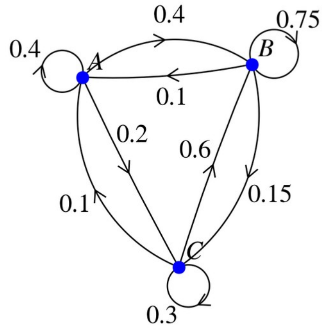
Exemples :

- La matrice de transition M_1 associée au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$



- La matrice de transition M_2 associée au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) :



$$M_2=\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste associé à un système donné.

Soit P_0 la matrice-ligne décrivant l'état initial du système étudié.

Soit P_n la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n du système étudié.

On a les relations :

$$P_{n+1} = P_n \times M \text{ et } P_n = P_0 \times M^n$$

Exemples :

- On considère la chaîne de Markov définie par le graphe probabiliste suivant :

et par la distribution initiale $P_0=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

Alors la loi de probabilité P_3 de X_3 est donnée par $P_3 = P_0 \times M^3$ avec $M=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}$.

On a ainsi $P_3=\begin{pmatrix}0{,}576 & 0{,}424\end{pmatrix}$.

La loi de probabilité de X_3 est donc la suivante :

x	1	2
$P(X_3 = x)$	0,576	0,424

- On reprend l'exemple de Ike. Le lundi, premier jour de l'année scolaire, Ike va à l'école en bus avec une probabilité de 0,

En rangeant les sommets par ordre alphabétique, la matrice de transition est $M=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$ et la distribution initiale correspondant au lundi de la rentrée est $P_0=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

On a donc $P_3 = P_0 \times M^3$. Or $M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ donc $P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5375 & 0{,}4625 \end{pmatrix}$.

La probabilité qu'Ike aille à l'école en bus le jeudi de la semaine de la rentrée est donc de 0,5375.

5) <u>État stable</u>

<u>Définition :</u>

Soit un graphe probabiliste d'ordre *n* associé à une expérience donnée.

On appelle **état stable**, un état probabiliste qui n'évolue pas lors de la répétition de l'événement.

<u>Exemple :</u>

Soit l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que $P_1 = P_0$ et, de proche en proche, $P_n = P_0$ pour tout entier naturel n.

L'état décrit par la matrice P_0 est donc un état stable.

<u>Propriété :</u>

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice ne comporte pas de 0.

L'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0.

L'état P est appelé **état stable du système** : il vérifie l'égalité $PM = P$.

<u>Propriété :</u>

Soit (X_n) une chaîne de Markov à 2 ou 3 états de matrice de transition M.

Il existe, au moins, une distribution initiale P tel que $PM = P$.

Une telle distribution est appelée **distribution invariante** de la chaîne de Markov.

<u>Exemple :</u>

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

Alors $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ est une distribution invariante.

En effet, $PM = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}9 & 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = P$

Propriété :

On considère une chaîne de Markov (X_n) dont on note M la matrice de transition et P_0 la distribution initiale.

Pour tour entier naturel n, on note P_n la distribution de X_n.

Si M ne contient aucun 0, alors la suite de matrices lignes (P_n) converge vers l'unique distribution invariante de la chaîne de Markov.

Exemple :

On reprend l'exemple de Ike.

La matrice de transition $M=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}$ ne contient pas de 0 : il existe donc une unique distribution invariante P.

Si on note $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ cette distribution invariante, alors on a $x + y = 1$ et la relation $PM = P$.

C'est-à-dire, $0,3\,x + 0,8\,y = x$ et $0,7\,x + 0,2\,y = y$.

Les deux dernières égalités se ramenant, en réalité, à la même équation, on a donc :

$\begin{cases}0,3x+0,8y=x\\ x+y=1\end{cases}$ soit $\begin{cases}-0,7x+0,8y=0\\ x+y=1\end{cases}$.

Ce système a pour solution $(x\,;y)=\left(\frac{8}{15};\frac{7}{15}\right)$.

La probabilité qu'Ike aille à l'école, en vélo, à très long terme vaut $\frac{7}{15}$.